

Satz Falls die Reihen

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i, \quad \sum_{j=0}^{\infty} b_j \quad \text{absolute}$$

Konvergieren, so konvergiert
Ihr Cauchy Produkt und
es gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^n a_{n-j} b_j \right) =$$

$$= \sum_i \sum_j a_i b_j$$

$$= \sum_j \sum_i a_i b_j$$

Satz $\forall x, y \in \mathbb{C}$,

$$\exp(x+y) = (\exp(x))(\exp(y))$$

Satz Für jedes $z \in \mathbb{C}$
konvergiert die Folge

$$\left(\left(1 + \frac{z}{n} \right)^n \right)_{n \geq 1} \quad \text{und}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{n} \right)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} =: \exp(z)$$

Insbesondere

$$e := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = \exp(1)$$

Notation: $e^x = \exp(x)$, $\forall x \in \mathbb{C}$.

§3 stetige Funktionen

$$\mathbb{R}^D = \mathcal{F}(D, \mathbb{R}) :=$$

$$\{f: D \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ eine Abbildung}\}.$$

Defn. Komposition (Verknüpfung, Verkettung)

von g und f ist die
noch

Funktion

$$\begin{aligned} g \circ f &: D \rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto g(f(x)) \end{aligned}$$

wobei

$$f: D \rightarrow \mathbb{R}, \quad g: E \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\text{mit } f(D) \subset E.$$

- f ist nach oben (bzw nach unten) beschränkt falls die Menge der Bilder

$$f(D) := \{f(x) \mid x \in D\} \subset \mathbb{R}$$

nach oben (nach unten) beschränkt ist

- $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ (strik) mon.
wachsend falls $\forall x, y \in D$

$$x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$$

$$(x < y \Rightarrow f(x) < f(y))$$

- $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ (strik) mon.
fallend falls $\forall x, y \in D$

$$x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$$

$$(x < y \Rightarrow f(x) > f(y)) \quad 1/2$$

Bsp ① Konstante Funktion

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad c \in \mathbb{R}$$
$$x \rightarrow c$$

Ist $c \in \mathbb{R}$, so setzt man

$$f(x) = c \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Die ist monotone
aber nicht strikt (streng)
monotone.

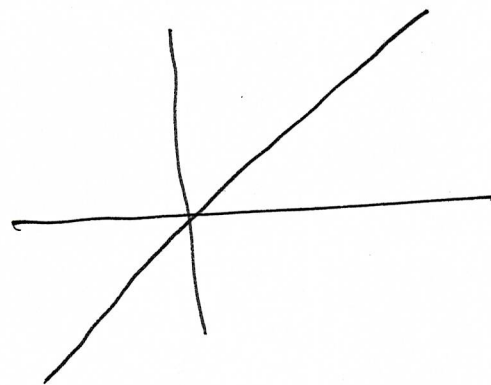
Die ist auch beschränkt

$$f(\mathbb{R}) = \{c\}$$

② Die Identische Abbildung

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$
$$x \rightarrow x$$

$$\text{d.h. } f(x) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$



ist streng
mon. wachsend
aber nicht
beschränkt.

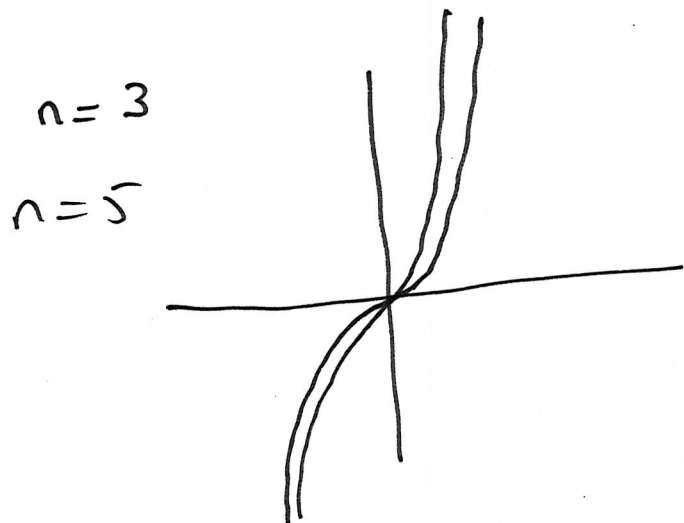
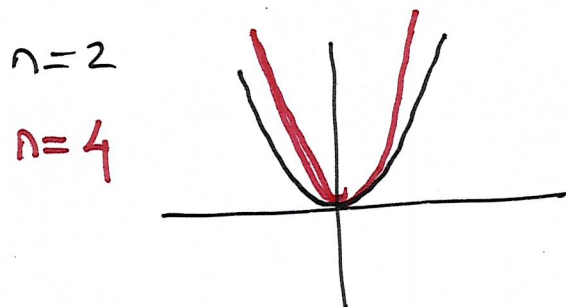
$$f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f([0, 1]) = \{f(x) \mid x \in [0, 1]\}$$
$$= \{x \mid x \in [0, 1]\}$$
$$= [0, 1].$$

f ist beschränkt!

③ $n \in \mathbb{N}$

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^n$$



f ist streng mon $\Leftrightarrow n = \text{ungerade}$.

§ 3.2 Stetigkeit

Defn. Sei $D \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in D$

Die Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{R}$

ist in x_0 stetig falls es

für jedes $\varepsilon > 0$, ein $\delta > 0$ gibt
so dass für alle $x \in D$, die

Implikation

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

gilt.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0: |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

d.h. $f((x_0 - \delta, x_0 + \delta))$
 $\subset (f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon)$.

Das Bild des Intervalls
 $\underbrace{(x_0 - \delta, x_0 + \delta)}_{\delta\text{-Umgebung von } x_0}$ unter der

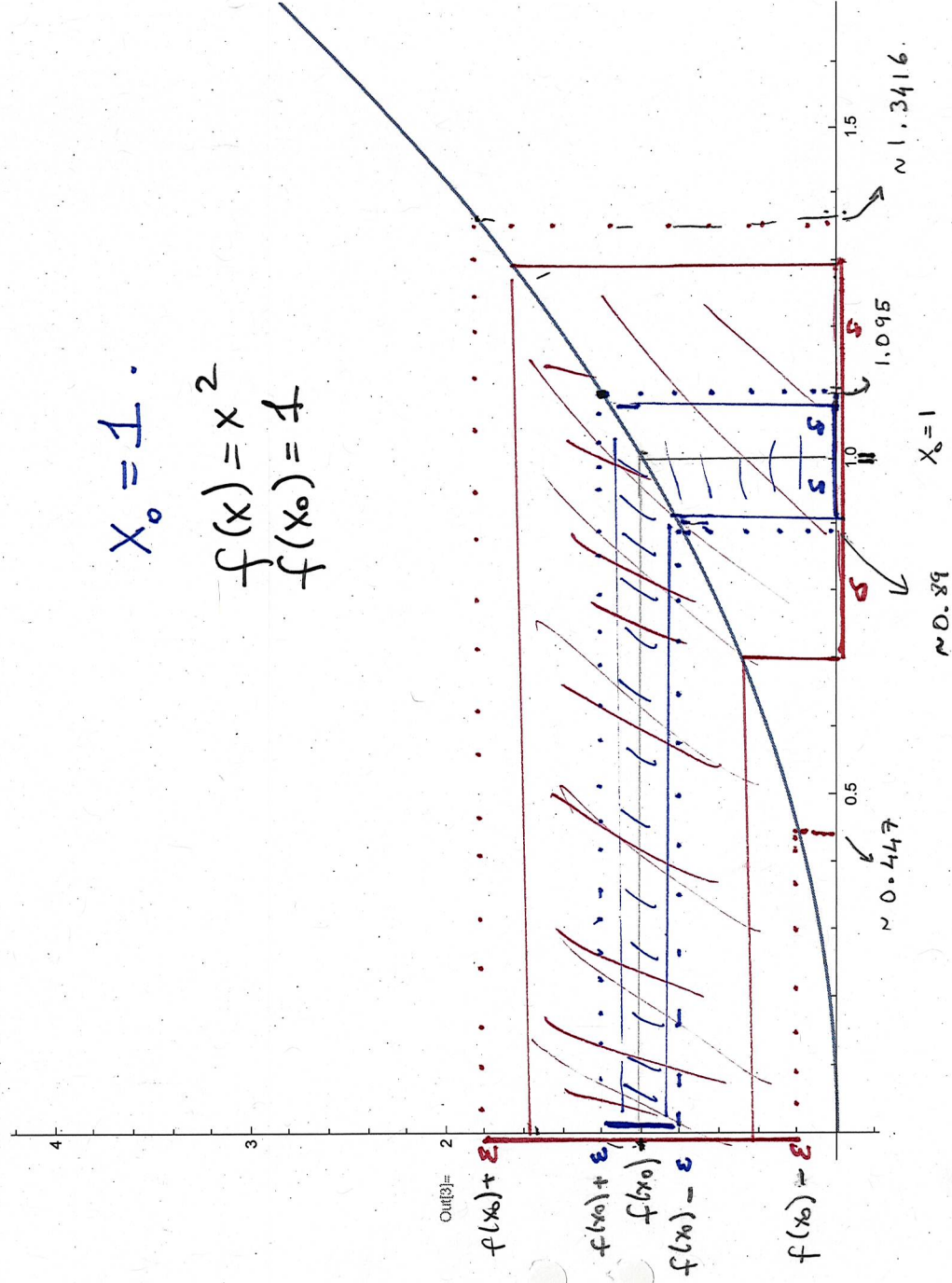
Funktion f ist in dem Intervall
 $\underbrace{(f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon)}_{\varepsilon\text{-Umgebung von } f(x_0)}$ enthalten.

d.h. Der Funktionswert $f(x)$
unterscheidet sich beliebig
wenig von $f(x_0)$ wenn
man sich der Stelle x_0
genügend nähert

Defn $f: D \rightarrow \mathbb{R}$

ist in D stetig falls
sie in jedem Punkt $x \in D$
stetig ist

In[3]:= Plot[x^2, {x, 0, 2}]



$$x_0 = 1.$$

$$f(x) = x^2$$

$$f(x_0) = 1$$

$\varepsilon = 0.2 \Rightarrow \delta$ kann als 0.09 gewählt werden.

$\varepsilon = 0.8 \Rightarrow \delta$ kann als 0.3 gewählt werden.

$$\varepsilon > 0, 0 < \delta \Rightarrow |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Bsp. $f(x) = x$ ist
stetig in jedem Punkt
 $x_0 \in \mathbb{R}$.

Sei $x_0 \in \mathbb{R}$

falls $|x - x_0| < \delta$ ist

$$|f(x) - f(x_0)| = |x - x_0| < \delta$$

Also für gegebenen $\varepsilon > 0$
kann man $\delta = \varepsilon$ wählen

dann gilt

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon = \delta.$$

Satz Sei $x_0 \in D \subset \mathbb{R}$
 $f: D \rightarrow \mathbb{R}$

Die Funktion f ist in x_0
stetig $\Leftrightarrow$ Für jede

Folge $(a_n)_{n \geq 1} \subset D$

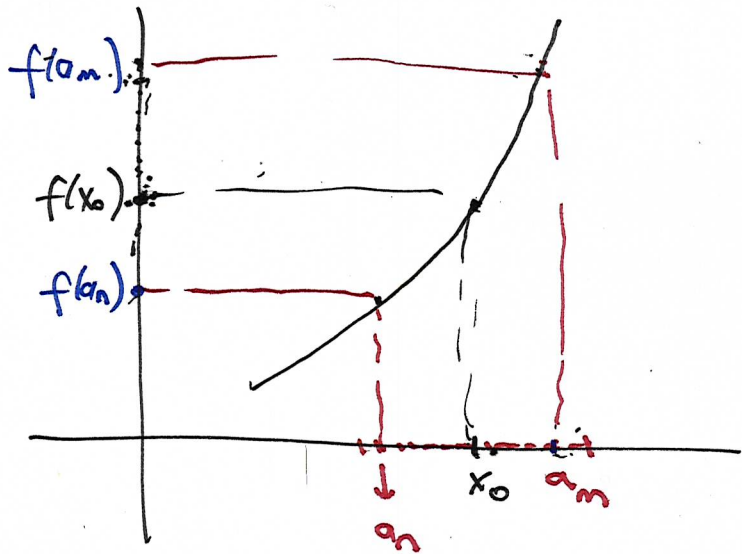
mit $\lim a_n = x_0$

gilt

$$\begin{aligned} \lim f(a_n) &= f(x_0) \\ &= f(\lim a_n) \end{aligned}$$

d.h.

$$\boxed{\lim f(a_n) = f(\lim a_n)}$$



Beweis Annahme = f ist in
 $(\Rightarrow)$ x_0 stetig

und $(a_n)_n \subset D$ eine Folge
 mit $\lim a_n = x_0$

z.z. $\lim f(a_n) = f(x_0)$

f stetig

Sei $\varepsilon > 0$, dann

da f in x_0 stetig ist,

$\exists \delta > 0$ s.d. $\forall x \in D$

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Dann für diese $\delta > 0$,

da $(a_n)_n$ konvergent ist, (mit
 Grenzwert x_0), es gibt $N \geq 0$

$N \in \mathbb{N}$ so dass

$$\left| a_n - x_0 \right| < \delta \quad \forall n \geq N$$

(Defn von $\lim a_n = x_0$)

Dann folgt dass

$$|f(a_n) - f(x_0)| < \varepsilon \quad \forall n \geq N$$

$$\Rightarrow \lim f(a_n) = f(x_0)$$

Mit dieser äquivalente Charakterisierung
der Stetigkeit und mit dem
entsprechenden Satz für konv.

Folgen $(\lim a_n = a, \lim b_n = b$
 $\Rightarrow \lim(a_n + b_n) = a + b$
 $\lim(a_n b_n) = ab$
 $\dots)$

erhalten wir

Kor Sei $x_0 \in D \subset \mathbb{R}, \lambda \in \mathbb{R}$

$f, g: D \rightarrow \mathbb{R}$

beide stetig in x_0

Dann ① $f+g, \lambda f, fg$
sind in x_0 stetig

② Falls $g(x_0) \neq 0$ dann

ist $\frac{f}{g} = \{x \in D \mid g(x) \neq 0\} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}$

in x_0 stetig.

Bsp. ① $f(x) = x+1$

② $f(x) = \frac{x+1}{x}$ ist stetig
in $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Defn Eine Polynomiale Funktion

$P: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist eine

Funktion der Form

$$P(x) = a_n x^n + \dots + a_0$$

wobei $a_n, a_{n-1}, \dots, a_0 \in \mathbb{R}$.

Falls $a_n \neq 0$, $n = \text{Grad von } P$.

Kor 1) Polynomiale Funktionen
sind auf ganz $\mathbb{R}$ stetig.

Wiederholte Anwendungen
von Kor mit $f(x) = x$

x stetig
 $x \cdot x$ stetig, ... x^n stetig
 $\lambda \cdot x^n$ stetig

② P, Q 2 Polyn. auf $\mathbb{R}$
mit $Q \neq 0$. Seien $x_1, \dots, x_m$

die Nullstellen von Q . Dann

$$\text{ist } \frac{P}{Q} : \mathbb{R} \setminus \{x_1, \dots, x_m\} \rightarrow \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \frac{P(x)}{Q(x)}$$

ist stetig.

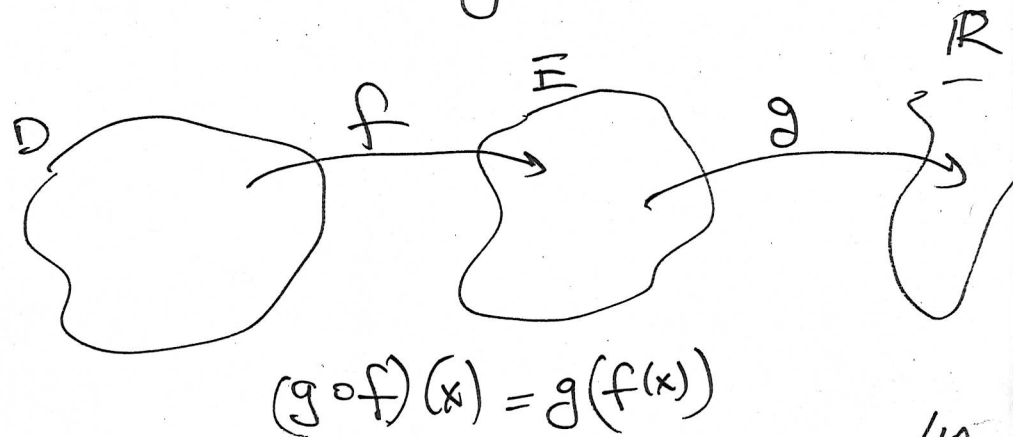
Satz Sei $D, E \subset \mathbb{R}$ 2
Teilmengen.

$$f : D \rightarrow E, \quad g : E \rightarrow \mathbb{R}$$

Sei $x_0 \in D$

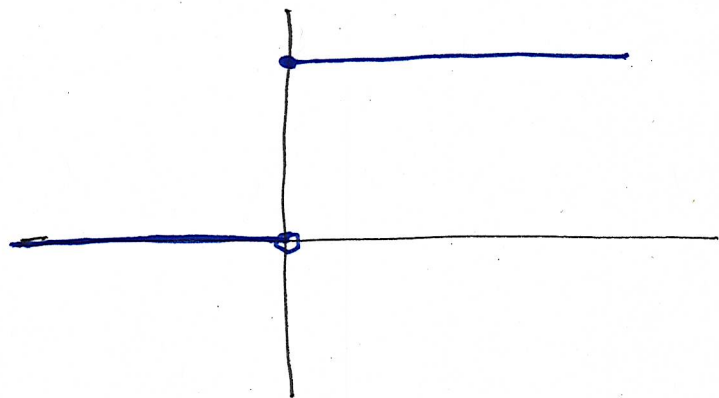
Falls f in x_0 und g
in $f(x_0) \in E$ stetig sind,

so ist $g \circ f : D \rightarrow \mathbb{R}$ in
 x_0 stetig.



Bsp.

$$g(x) := \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$



~~Sei~~ $g(x)$ ist in $x_0 = 0$
nicht stetig!

$$a_n = \left(-\frac{1}{n}\right)_{n \geq 1} \quad \lim a_n = x_0 = 0.$$

$$g(a_n) = g\left(-\frac{1}{n}\right) = 0 \quad \forall n$$

$$(g(a_n))_{n \geq 1} = (0, 0, \dots, 0, \dots)$$

$$\lim g(a_n) = 0$$

$$\lim a_n = 0$$

$$g(\lim a_n) = g(0) = 1.$$

$$0 = \lim g(a_n) \neq g(\lim a_n) = 1.$$

Bsp. Für eine nirgendwo stetige
Funktion

Die Indikatorfunktion der
Rationale Zahlen

$$\mathbb{1}_{\mathbb{Q}} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in \mathbb{Q}. \\ 0 & \text{Fall } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

ist in keinem Punkt $x \in \mathbb{R}$ stetig!

Beweis Sei $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
irrationale Zahl

z.B. $\pi = 3.14 \dots$

Sei a_k die an der k -ten
Nachkommastelle abgebrochene
Dezimaldarstellung
von x_0

$$x_0 = \pi, \quad a_1 = 3, \quad a_2 = 3.1$$

$$a_3 = 3.14$$

$$a_k \in \mathbb{Q}.$$

$$\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(a_k) = 1 \quad \forall k.$$

$$\left(\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(a_k) \right)_k = (1, 1, \dots)$$

$$\lim \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(a_k) = 1.$$

$$\lim a_k = x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}.$$

$$\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(\lim a_k) = \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x_0) = 0$$

$\Rightarrow$

$$1 = \lim (\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(a_k)) \neq \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(\lim a_k) = 0$$

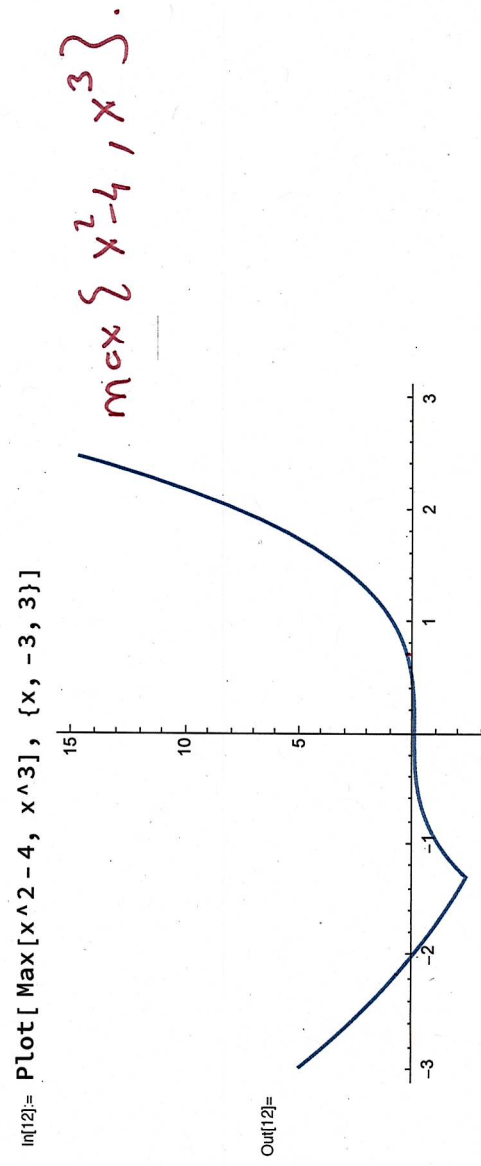
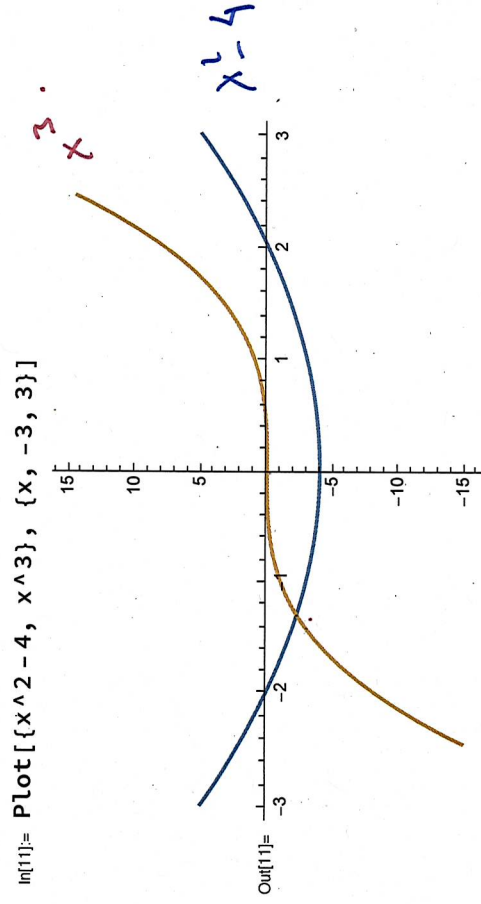
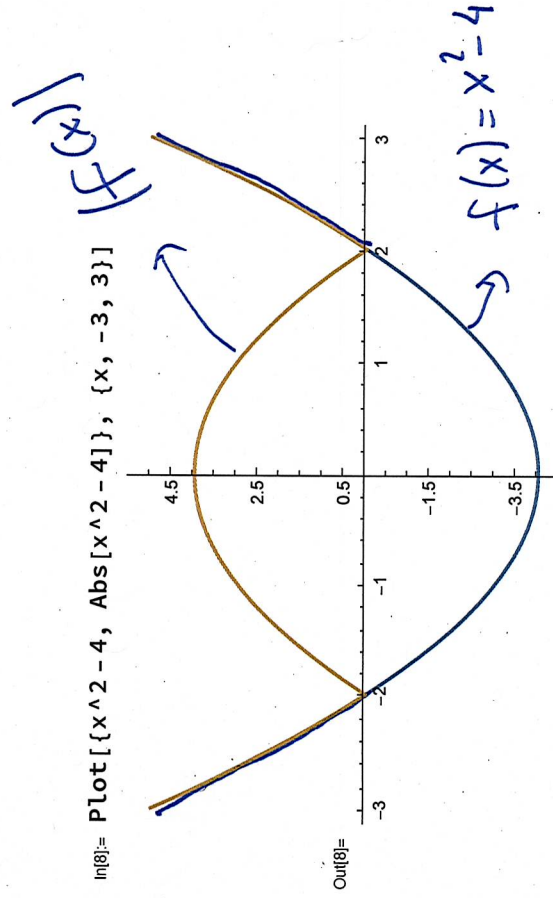
$\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ ist in jeder irrationalen
Zahl $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

nicht stetig.

Übung Sei $x_0 \in \mathbb{Q}$.

$$\text{Sei } a_k := x_0 + \frac{\pi}{k} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}.$$

$$\lim a_k = x_0$$



lemma. Sei $D \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in D$

$f, g: D \rightarrow \mathbb{R}$ stetig in

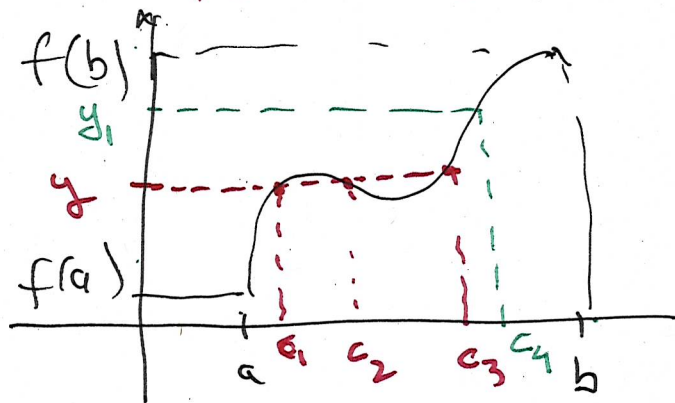
x_0 . Dann sind $|f|$

$\max(f, g)$, $\min(f, g)$ in

x_0 stetig.

$$(\max(f, g))(x) := \max\{f(x), g(x)\}$$

§ 3.3 Der Zwischenwertsatz (Intermediate value thm).



$$f(c_1) = f(c_2) = f(c_3) = y$$

$$f(c_4) = y.$$

* Satz (Zwischenwertsatz) Sei

$I \subset \mathbb{R}$ eine

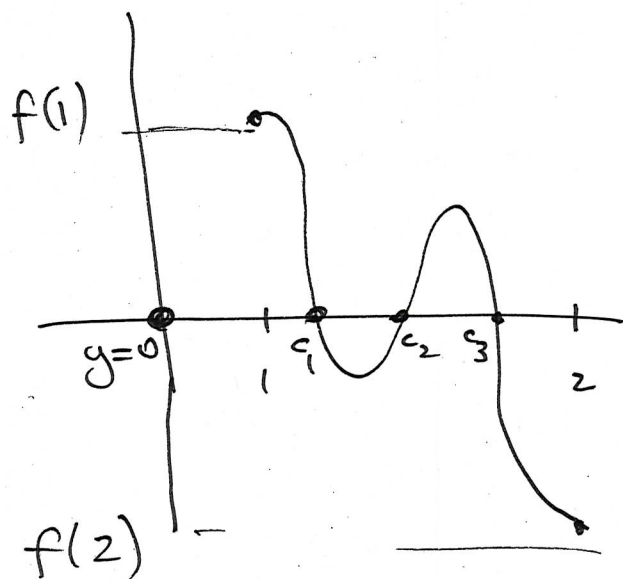
Intervall; $f: I \rightarrow \mathbb{R}$
stetig und $a, b \in I$

Für jedes y zwischen
 $f(a)$ und $f(b)$ gibt es mindestens
eine c zwischen a und b
mit $f(c) = y$.

d.h. Falls $f(a) < f(b)$

und $y \in [f(a), f(b)]$

dann gilt $c \in \begin{cases} [a, b] & \text{falls } a < b \\ [b, a] & \text{falls } a > b \end{cases}$



$y=0 \quad \exists \text{ 3 punkte } c_1, c_2, c_3$
 s.d. $f(c_i) = 0 \quad i=1, 2, 3.$

Beweis

Idee - Wir benutzen ein Approximationsverfahren.

Wir definieren 2 monotone Folgen

$$a = a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n < b_n \leq b_{n-1} \leq \dots \leq b_1 = b$$

$(a_n)_{n \geq 1}$ mon $\nearrow$

$(b_n)_{n \geq 1}$ mon $\searrow$

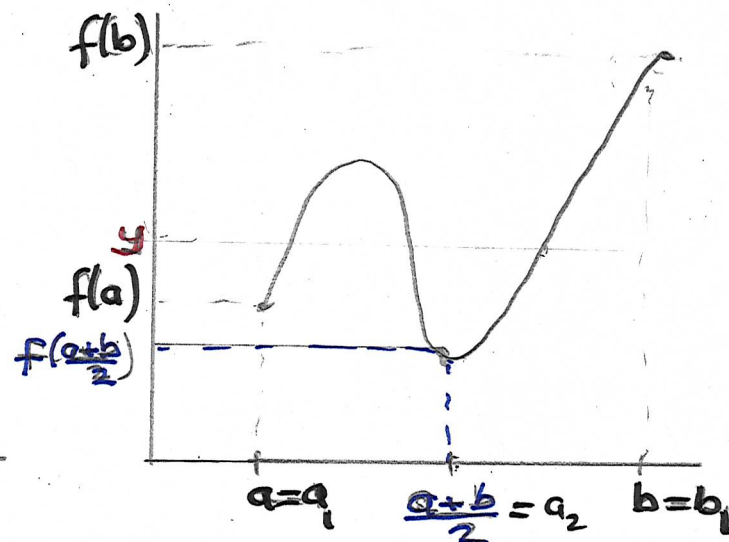
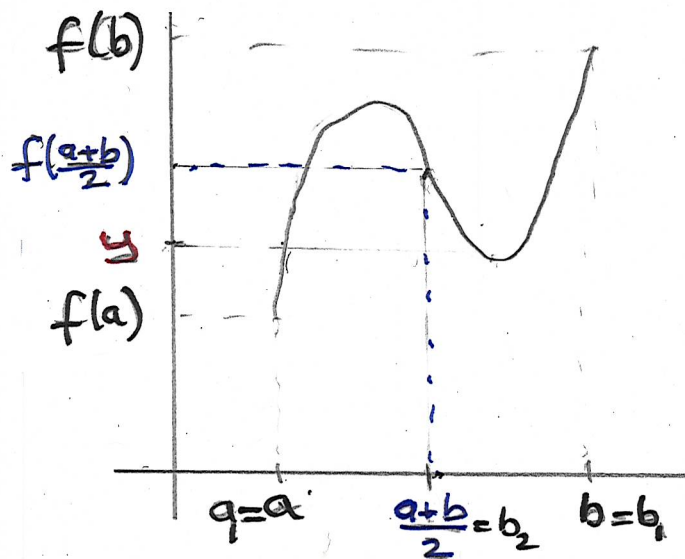
$(a_n)_{n \geq 1}, (b_n)_{n \geq 1}$ beschränkte Folge..

$\implies$
Mon.-konv
satz

$\lim b_n, \lim a_n$
existiert.

Wir haben auch $\lim b_n = \lim a_n$

und $f(a_n) < y < f(b_n) = c$



Fall 1: $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \geq y$

$$a_1 = a, \quad b_1 = b$$

$$a_2 = a_1, \quad b_2 = \frac{a+b}{2} = \frac{a_1+b_1}{2}$$

Fall 2: $f\left(\frac{a+b}{2}\right) < y$

$$a_1 = a, \quad b_1 = b$$

$$a_2 = \frac{a+b_1}{2}, \quad b_2 = b_1 = \frac{a+b}{2}$$

Auf jedem Fall gilt

- ① $a_1 \leq a_2 < b_2 \leq b_1$
- ② $b_2 - a_2 = \frac{b_1 - a_1}{2}$
- ③ $f(a_2) < y \leq f(b_2)$